

辽宁民族师范高等专科学校

2023 年单独招生考试数学考试大纲及题库

第一部分 考试大纲

一、命题指导思想

根据高职类学校对新生文化素质的要求,数学科目考试主要考查考生对高中数学的基础知识、基本技能的掌握程度。同时,注重对数学思想与方法的考查,体现数学的基础性、应用性和工具性的学科特点。多视角、多维度、多层次地考查数学思维品质和思维能力,考查考生对数学本质的理解,以及进入高等学校继续学习的潜能。

二、考试形式和试卷结构

1. 答卷方式: 闭卷, 笔试。
2. 试卷满分为 100 分。考试时间 30 分钟。
3. 试卷包含难题约 10%, 中等难度题约 20%, 容易题约 70%。
4. 题型及分值比例:

序号	题型	分值比例
一	单项选择题	约 40%
二	填空题	约 20%
三	解答题	约 40%

三、考试内容及要求

(一) 集合

1. 理解集合的概念; 理解元素与集合的关系、空集的含义。
2. 掌握集合的表示法、数集的概念及其相对应的符号。
3. 掌握集合间的关系(子集、真子集、集合相等)。
4. 理解集合的运算(交集、并集、补集)。
5. 了解条件关系。

(二) 不等式

1. 了解不等式的基本性质。
2. 掌握区间的基本概念。
3. 了解含绝对值的一元一次不等式的解法。

(三) 函数

1. 理解函数的概念。
2. 理解函数的三种表示法。
3. 理解函数的单调性与奇偶性。

(四) 指数函数

1. 了解实数指数幂; 理解有理指数幂的概念及其运算法则。
2. 了解幂函数的概念。
3. 理解指数函数的概念、图像与性质。

(五) 三角函数

1. 了解任意角的概念。
2. 理解弧度制概念及其与角度的换算。
3. 理解任意角正弦函数、余弦函数和正切函数的概念。
4. 理解同角三角函数的基本关系式： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 、 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 。
5. 了解诱导公式： $2k\pi + \alpha$ 、 $-\alpha$ 、 $\pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦及正切公式。
6. 理解正弦函数的图像和性质。
7. 了解余弦函数的图像和性质。

(六) 数列

1. 了解数列的概念。
2. 理解等差数列的定义，通项公式，前 n 项和公式。
3. 理解等比数列的定义，通项公式，前 n 项和公式。
4. 了解数列实际应用。

(七) 平面向量

1. 了解平面向量的概念。
2. 理解平面向量的加、减、数乘运算。
3. 了解平面向量的坐标表示。
4. 了解平面向量的内积。

(八) 直线和圆的方程

1. 掌握两点间距离公式及中点公式。
2. 理解直线的倾斜角与斜率。
3. 掌握直线的点斜式方程和斜截式方程。
4. 理解直线的一般式方程。
5. 掌握圆的标准方程和一般方程。

(九) 立体几何

1. 了解平面的基本性质。
2. 理解直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定与性质。
3. 理解直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定与性质。
4. 了解柱、锥、球的结构特征及表面积、体积的计算。

(十) 概率与统计初步

1. 理解分类、分步计数原理。
2. 理解随机事件。
3. 理解概率及其简单性质。

第二部分 测试题库及参考答案

一、单项选择题

1. 已知集合 $M = \{1, 3, 5\}$ ， $N = \{1, 4\}$ ，那么集合 $M \cup N$ 等于 ()。
A. $\{1\}$ B. $\{4\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 3, 4, 5\}$
2. 集合 $M = \{a, b, c\}$ 的真子集个数为 ()。
A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

3. 已知 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()。
- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{5\}$
4. 下列函数中为偶函数的是 ()。
- A. $y = -x$ B. $y = \sin x$ C. $y = \cos x$ D. $y = x^2 + x$
5. 下列函数在其定义域内是增函数的是 ()。
- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x$ C. $y = x^2$ D. $y = \sin x$
6. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 不是增函数的是 ()。
- A. $y = 2^x$ B. $y = x^{-1}$ C. $y = \lg x$ D. $y = x^3$
7. 直线 $3x - 2y - 6 = 0$ 的斜率和在 x 轴上截距分别为 ()。
- A. $\frac{3}{2}, 2$ B. $\frac{2}{3}, 2$ C. $\frac{3}{2}, -3$ D. $\frac{2}{3}, -3$
8. 已知直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$, 直线 $l_2: 2x - y + 5 = 0$, 则这两条直线的位置关系为 ()。
- A. 平行 B. 相交但不垂直 C. 垂直 D. 重合
9. 若 x 与 y 均为实数, 则 $x^2 = y^2$ 是 $x = y$ 成立的 () 条件。
- A. 必要不充分 B. 充分不必要 C. 充分必要 D. 既不充分也不必要
10. $x > 4$ 是 $x > 2$ 的 () 条件。
- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充分必要 D. 既不充分也不必要
11. 与角 $\frac{\pi}{6}$ 终边相同的角是 ()。
- A. 60° B. 120° C. 240° D. 390°
12. $\tan(-30^\circ)$ 等于 ()。
- A. $\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
13. 已知 $\sin x = \frac{12}{13}$, x 是第二象限角, 则 $\cos x =$ ()。
- A. $\frac{5}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $-\frac{12}{5}$ D. $\frac{12}{5}$
14. 点 $(1, -3)$ 关于 y 轴的对称点的坐标是 ()。
- A. $(1, 3)$ B. $(1, -3)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-1, -3)$

15. $\log_3^9 = (\quad)$ 。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

16. 下列不等式恒成立的是(\quad)。

- A. $|3| > |-3|$ B. $2 < \sqrt{3}$ C. $2^3 < 3^2$ D. $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$

17. 240° 是(\quad)。

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

18. 符合下列条件的 α 是第二象限的角是 (\quad)。

- A. 如果 $\sin \alpha > 0$, 且 $\cos \alpha < 0$ B. 如果 $\tan \alpha > 0$, 且 $\cos \alpha < 0$
C. 如果 $\sin \alpha < 0$, 且 $\tan \alpha < 0$ D. 如果 $\cos \alpha > 0$, 且 $\sin \alpha < 0$

19. 不等式 $\frac{x-3}{x-1} < 0$ 的解集是 (\quad)。

- A. ϕ B. $(1,3)$ C. $(-\infty,3)$ D. $(3,+\infty)$

20. 数列 1, 2, 3, 4, \dots 的通项公式是 (\quad)。

- A. $a_n = n$ B. $a_n = n+1$ C. $a_n = n-1$ D. $a_n = n+2$

21. 等差数列的通项公式为 $a_n = 3n+1$, 该数列的首项和公差分别为 (\quad)。

- A. 3, 4 B. 5, 3 C. 3, 5 D. 4, 3

22. 已知三个数 16, 8, x 成等比数列, 则 x 等于 (\quad)。

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 32

23. 若一次函数 $y=kx+b$ 的图象过一、二、三象限, 则 (\quad)。

- A. $k > 0$ 且 $b > 0$ B. $k < 0$ 且 $b > 0$ C. $k > 0$ 且 $b < 0$ D. $k < 0$ 且 $b < 0$

24. 下列图形不一定是平面图形的是 (\quad)。

- A. 三角形 B. 四边形 C. 圆 D. 梯形

25. 若直线 a 和 b 没有公共点, 则 a 与 b 的位置关系是 (\quad)。

- A. 相交 B. 平行 C. 异面 D. 平行或异面

26. 直线 $3x+4y-13=0$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 的位置关系是 (\quad)。

- A. 相离 B. 相交 C. 相切 D. 无法判定

27. 二次函数 $y = x^2 - 2x + 5$ 的值域是 (\quad)。

- A. $(4, +\infty)$ B. $(-\infty, 4]$ C. $(-\infty, 4)$ D. $[4, +\infty)$

28. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标是 ()。

- A. $(0, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 0)$ D. $(-1, 0)$

29. 已知点 $A(-4, 0)$ 和 $B(0, 2)$, 则线段 AB 的中点坐标为 ()。

- A. $(-4, 2)$ B. $(4, -2)$ C. $(-2, 1)$ D. $(2, -1)$

30. 直线 $x+y-4=0$ 与直线 $4x-3y+5=0$ 的交点的坐标是 ()。

- A. $(1, 3)$ B. $(-1, -3)$ C. $(1, -3)$ D. $(-1, 3)$

31. 函数 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为 ()。

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

32. 已知 $y=f(x)$ 为偶函数, 且 $f(-2)=10$, 则 $f(2)=$ ()。

- A. 10 B. -10 C. 20 D. -20

33. $(m^3)^2 \cdot m^4 =$ ()。

- A. m^9 B. m^{10} C. m^{12} D. m^{14}

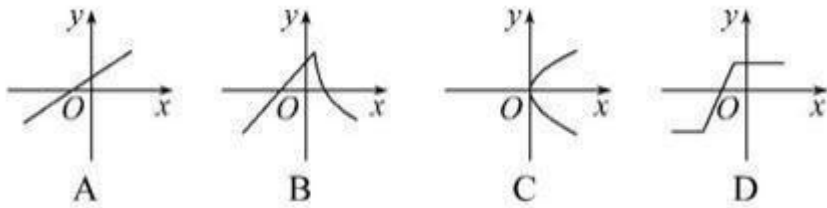
34. 若 $0.5^m < 0.5^n$, 则 m 与 n 的大小关系是 ()。

- A. $m > n$ B. $m < n$ C. $m = n$ D. 无法确定

35. 设 $a > b > 1$, 则下列不等式中正确的是 ()。

- A. $0.2^a > 0.2^b$ B. $2^a < 2^b$ C. $\log_0.2^a < \log_0.2^b$ D. $\log_2^a < \log_2^b$

36. 下列各图中, 不是函数图像的是 ()。



37. 函数 $y = x^2 + 4x + 3$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值是 ()。

A. 0 B. 3 C. 15 D. 17

38. 由 1, 2, 3, 4 可以组成() 个没有重复数字的四位数。

A. 4 B. 6 C. 12 D. 24

39. $P(A) = \frac{3}{5}$ 时, $P(\bar{A}) = ()$ 。

A. 0 B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 1

40. 从 5 本不同的书中任选 3 本送给 1 名学生, 共有() 种不同的方案。

A. 5 B. 3 C. 10 D. 60

41. 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期是()。

A. π B. 2π C. $\frac{3}{4}\pi$ D. 3π

42. 下列结论中不正确的是()。

A. 两条平行直线可以确定一个平面

B. 两条相交直线可以确定一个平面

C. 直线与这条直线外一点可以确定一个平面

D. 三点可以确定一个平面

43. 若 $0.7^m > 0.7^n$, 则 m 与 n 的大小关系是()。

A. $m > n$ B. $m < n$ C. $m = n$ D. 无法确定

44. 在 8 件产品中有两件次品, 现从 8 件产品中任意抽取 3 件, 则 3 件中含有 1 件次品的抽法种数是()。

A. $C_2^1 C_8^1$ B. $C_2^2 C_8^1$ C. $C_2^2 C_6^1$ D. $C_2^1 C_6^1$

45. 下列向量中与向量 $(-1, 2)$ 共线的是()。

A. $(1, 2)$ B. $(1, -2)$ C. $(-2, -4)$ D. $(2, 4)$

46. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则对角线 A_1C 的长度为()。

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

47. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, 则 $f(-1) =$ ()。

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

48. 下列用弧度制表示角 30° 正确的是 ()。

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

49. 平行于同一直线的两条直线的位置关系为()。

- A. 相交 B. 异面 C. 平行 D. 重合

50. 函数 $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x-7}}$ 的定义域是()。

- A. $\{x | x \neq 7\}$ B. $\{x | x \geq 7\}$ C. $\{x | x > 7\}$ D. $\{x | x < 7\}$

二、填空题

51. 函数 $y = x$ 的定义域为_____。

52. 函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域是_____。

53. 函数 $y = \log_2(1+x)$ 的定义域是_____。

54. 已知 $2^a > 2$, 则 a 的取值范围为_____。

55. 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的零点是_____。

56. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 且 $f(-5)=6$, 则 $f(5)=$ _____。

57. 若 $\log_6 x = -2$, 则 $x =$ _____。

58. $\lg 10 + \lg 100 =$ _____。

59. 已知 $C_n^2 = 21$, 则 $n =$ _____。

60. 已知 $A_n^2 = 6$, 则 $n =$ _____。

61. $f(x) = x^2 - x + 2$, 则 $f(3) =$ _____。

62. $f(x) = 2x^2 - x + 2$, 则 $f(2) =$ _____。

63. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____。
64. $\sin 28^\circ \cos 17^\circ + \cos 28^\circ \sin 17^\circ$ 的值是_____。
65. $\cos 78^\circ \cos 12^\circ - \sin 78^\circ \sin 12^\circ$ 的值为_____。
66. 向量 $\vec{a} = (4, 5)$, $\vec{b} = (-4, 3)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。
67. 向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-4, 3)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。
68. 抛掷一枚质地均匀的骰子, 出现的点数大于 2 的概率是_____。
69. 抛掷一枚质地均匀的骰子, 出现的点数大于 4 的概率是_____。
70. 抛掷一枚质地均匀的骰子, 得到的点数是奇数的概率是_____。
71. 球的半径是 3 厘米, 则它的表面积是_____平方厘米。
72. 易拉罐的底面直径为 8cm, 高 25cm, 它的表面积为_____。
73. 一个正方体的体积是 8, 则这个正方体的内切球的表面积是_____。
74. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 5$, 那么 $a_{10} =$ _____。
75. 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 5^n$, 则 $a_2 =$ _____。
76. 已知圆的方程 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$, 则圆心坐标为_____。
77. 函数 $y = \frac{1}{x + 2}$ 的反函数图象过点 $(3, a)$, 则 $a =$ _____。
78. 过两点 $A(-1, -5)$ 与 $B(-4, -2)$ 的直线的斜率为_____。
79. 已知直线 $l_1: y = kx$, $l_2: y = 2x - 3$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $k =$ _____。
80. 不等式 $|x| < 2$ 的解集为_____。

三、解答题

80. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集。
81. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 4\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$ 。
82. 已知二次函数满足 $f(-1) = f(3) = 8$, 且 $f(0) = 5$ 。
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $x \in [-3, 2]$, 求函数 $f(x)$ 的最小值。
83. 已知二次函数满足 $f(-2) = f(4) = 0$, $f(0) = 1$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式；
- (2) 若 $x \in [-1, 2]$ ，求函数 $f(x)$ 的值域。

84. 已知函数 $f(x) = 3x + 2a$

- (1) 求 $f(0)$ ，(用含 a 的代数式表示)；
- (2) 如果 $f(a) = 2a - 3$ ，求 a 的值。

85. 已知 $\sin a = \frac{4}{5}$ ，且 a 是第二象限的角，求 $\cos a$ ， $\tan a$ 。

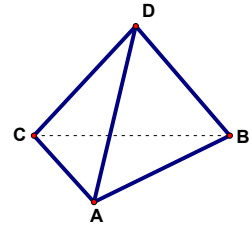
86. 设 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ，求 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值。

87. 已知 $\tan \alpha = 3$ ，求 $\frac{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$ 。

88. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ ，求

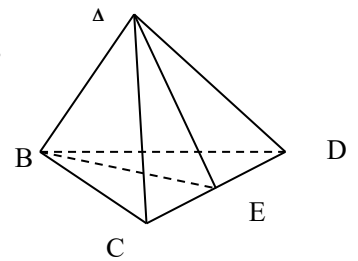
- (1) $\sin \alpha \cos \alpha$ ；
- (2) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 。

89. 在如图所示的三棱锥中， $AC=BC=AD=BD=5$ ， $AB=6$ ，当 $CD=4$ 时，求二面角 $C-AB-D$ 的大小。



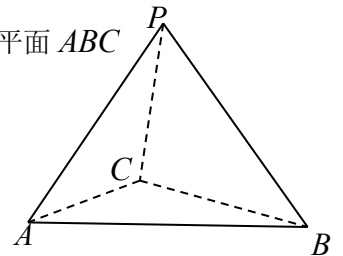
90. 已知空间四边形 $ABCD$ 中， $AC=AD$ ， $BC=BD$ ，且 E 是 CD 的中点。

- 求证：(1) $CD \perp$ 平面 ABE ；
- (2) 平面 $ABE \perp$ 平面 ACD 。



91. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=5$ ， $BC=4$ ， $AC=3$ ，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC

求证： $PA \perp BC$ 。



92. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 3, a_5 = 81$ 。

(1) 求 a_n ;

(2) 设 $b_n = \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

93. 求数列 $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{1}{16}, \dots$ 的通项和前 n 项的和。

94. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 + a_3 = 10, S_4 = 24$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n}$, 求证: $T_n < \frac{3}{4}$ 。

95. 求满足下列条件的直线方程。

(1) 过点 $(5, 2)$ 斜率为 3 ;

(2) 在 y 轴上的截距为 5 , 斜率为 4 。

96. 已知直线 $l_1: x + y - 3 = 0, l_2: x - y + 1 = 0$ 且 A 为 l_1 与 l_2 的交点。

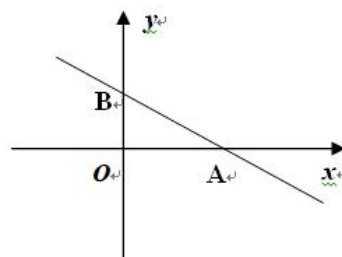
(1) 求点 A 的坐标;

(2) 求过点 A 并且斜率为 2 的直线方程。

97. 如图, 直线 $x + y - 2 = 0$ 与两坐标轴的交点为 A, B 。

(1) 求点 A 与 B 的坐标;

(2) 求以线段 AB 为直径的圆的方程。



98. 在一次促销活动中, 假设中一等奖的概率是 0.1 , 中二等奖的概率是 0.2 , 中三等奖的概率是 0.4 , 计算在这次抽奖活动中中奖的概率和不中奖的概率分别是多少。

99. 箱子里装有 4 个一级品与 6 个二级品, 任取 5 个产品, 求:

- (1) 其中恰有两个一级品的概率；
- (2) 其中最多有一个一级品的概率。

100. 盒中有 6 只灯泡，其中 2 只次品，4 只正品，有放回地从中任取两次，每次取一只，试求下列事件的概率：

- (1) 取到的 2 只都是次品；
- (2) 取到的 2 只中正品、次品各一只；
- (3) 取到的 2 只中至少有一只正品。

试题库参考答案:

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	C	B	B	A	A	A	A
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	D	B	B	D	B	C	C	A	B	A
题号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答案	D	B	A	B	D	C	D	C	C	A
题号	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答案	D	A	B	A	C	C	B	D	B	C
题号	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
答案	A	D	B	D	B	C	A	D	C	C

二、填空题

- 51: $(-\infty, +\infty)$ 52: $[0, +\infty)$ 53: $(-1, +\infty)$ 54: $\{a | a > 1\}$ 55: -1, 1
- 56: -6 57: $1/36$ 58: 3 59: 7 60: 3
- 61: 8 62: 4 63: -1 64: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 65: 1
- 66: -1 67: 4 68: $\frac{2}{3}$ 69: $\frac{1}{3}$ 70: $\frac{1}{2}$
- 71: 36π 72: 232π 73: 4π 74: 15 75: 25
- 76: (2, 3) 77: $-\frac{5}{3}$ 78: -1 79: 2 80: $\{x | -2 < x < 2\}$

三、解答题

80. 解: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

81. 解: $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 0 < x < 4\} = \{x | -1 < x < 4\}$

$A \cap B = \{x | -1 < x < 2\} \cap \{x | 0 < x < 4\} = \{x | 0 < x < 2\}$

82. 解: (1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 则由 $f(0) = 5$ 得 $c = 5$

又 $f(-1) = f(3) = 8$

所以 $a-b+5=9a+3b+5=8$, 解出 $a=1, b=-2$

所以 $f(x)=x^2-2x+5$

(2) 因为 $f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ 且 $x \in [-3, 2]$

所以, 当 $x=1$ 时 $f(x)$ 有最小值为 4.

83. 解: (1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 则由 $f(0)=1$ 得 $c=1$

又 $f(-2)=f(4)=0$, 所以 $4a-2b+1=16a+4b+1=0$,

解出 $a=-\frac{1}{8}, b=\frac{1}{4}$,

所以 $f(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+1$ 。

(2) 因为 $f(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+1=-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{9}{8}$ 且 $x \in [-1, 2]$

所以当 $x=-1$ 时 $f(x)$ 有最小值 $\frac{5}{8}$, 当 $x=1$ 时 $f(x)$ 有最大值 $\frac{9}{8}$

所以函数 $f(x) \in \left[\frac{5}{8}, \frac{9}{8} \right]$

84. 解: (1) 因为 $f(x)=3x+2a$, 所以 $f(0)=0+2a=2a$;

(2) 因为 $f(x)=3x+2a$, 所以 $f(a)=3a+2a=5a$

因为 $f(a)=2a-3$, 所以 $5a=2a-3$, 从而 $a=-1$ 。

85. 解: 由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 可得 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

又 $\because \alpha$ 是第二象限的角, 所以 $\cos \alpha < 0$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}。$$

86. 解: $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

87. 解: $\frac{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 3 \sin \alpha} = \frac{4 \tan \alpha - 2}{5 + 3 \tan \alpha} = \frac{4 \times 3 - 2}{5 + 3 \times 3} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

88. 解: (1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$,

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha) \\ &= \sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{而 } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\text{所以 } \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = 0$$

89. 解: 取 AB 中点为 E, 连接 DE, CE,

因 AC=BC=AD=BD=5, AB=6,

所以 DE ⊥ AB, CE ⊥ AB, ∠DEC 为二面角 C—AB—D 的平面角,

$$AE=EB=3, CE=DE=4,$$

又因 CD=4

所以△CDE 为等边三角形, ∠DEC = 60°

因此二面角 C—AB—D 的大小为 60°

90. 证明: (1) ∵ AC=AD, E 是 CD 的中点

$$\therefore CD \perp AE,$$

同理 $CD \perp BE$

而 $AE \cap BE = E$

$\therefore CD \perp$ 平面 ABE

(2) $\because CD \perp$ 平面 ABE

$CD \subset$ 平面 ACD

\therefore 平面 $ABE \perp$ 平面 ACD .

91. 证明: $\because AB = 5, BC = 4, AC = 3,$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

$$\therefore AC \perp BC.$$

\because 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 且平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC = AC$, $BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

$\because PA \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore PA \perp BC$.

92. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据题意得

$$\begin{cases} a_1 q = 3 \\ a_1 q^4 = 81 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}, \text{ 因此 } a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}.$$

$$(2) b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^{n-1} = n-1,$$

$$\text{所以 } S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(0+n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}.$$

93. 解: 原式 = $(1+3+5+7+\cdots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots)$

$$\text{所以 } S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 + \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = n^2 + 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

94. (1) 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 + a_3 = 10, S_4 = 24,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 2d = 10, \\ 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 24. \end{cases}$$

解得 $a_1 = 3$, $d = 2$ 。

$$\therefore a_n = 3 + 2 \times (n - 1) = 2n + 1$$

(2) 证明: 由 (1) 得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(3 + 2n + 1)}{2} = n(n + 2)$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) < \frac{3}{4} \end{aligned}$$

95. 解: (1) 根据直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$

可得 $y - 2 = 3(x - 5)$ 即 $3x - y - 13 = 0$ 。

(2) 根据直线的斜截式方程 $y = kx + b$

可得 $y = 4x + 5$ 即 $4x - y + 5 = 0$ 。

96. 解: (1)
$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \therefore A(1, 2)$$

(2) $A(1, 2), k=2,$

所以过点 A 斜率为 2 的直线方程为 $y-2=2(x-1)$ 即 $2x-y=0$ 。

97. 解: (1) 令 $y=0$, 得 $x=2$; 令 $x=0$, 得 $y=2$

所以 $A(2, 0), B(0, 2)$;

(2) 设线段 AB 的中点 $M(x, y)$, 则: $x=1, y=1,$

所以 $M(1, 1)$ 为圆心

圆的半径 $r = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{2}$

所以圆的方程为: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 。

98. 解: 中奖概率 $P(A) = 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.7$

不中奖的概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$ 。

99. 解: (1) $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{20}{21}$;

(2) $P(B) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^4 + C_4^0 \cdot C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{11}{42}$ 。

100. 解: (1) $P(A) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$;

(2) $P(B) = \frac{2 \times 4 \times 2}{6 \times 6} = \frac{4}{9}$;

(3) $P(C) = \frac{2 \times 4 \times 2 + 4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{8}{9}$ 或 $P(C) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ 。